Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Δεκ. 2015, Θέμα: Διαν. Χώροι

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^4$:
   - $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}$
   - $B = \{(a, b, a + 2b, a - 7b) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $C = \{(ab, 2b, a, -a) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $D = \{(a, 2b, b, 4) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   - $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 x_2 = x_3 x_4\}$

2. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{n\times n}$ εξετάστε αν το επόμενα υποσύνολα είναι υποχώροι. α) Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων. β) Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων. γ) Το σύνολο των αντιστρεψίμων πινάκων. δ) Το σύνολο των πινάκων με βαθμίδα ίση με n-1.

3. Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και U, W υποχώροι του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι αν $U \cup W$ είναι υποχώρος τότε $U \subseteq W$ ή $W \subseteq U$.

4. Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδιασμός των $\{(2, 4, 0), (1, 3, -1), (3, 7, -1)\}$.

5. Ανήκει το στοιχείο $1 + x - 2x^2 + 3x^3$ στον υποχώρο
$$V =< 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3 >$$
του $\mathbb{R}_3[x]$;

6. Είναι το υποσύνολο $\{(2, 4, 0), (1, 3, -1), (3, 7, -1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ γραμμικά ανεξάρτητο;

7. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3 με πραγματικούς συντελεστές δίνεται το σύνολο $\{\mathrm{x}^2 - 1, \mathrm{x} + 2, \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\}$. Να εξετάσετε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

8. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{2\times 2}$ των 2×2 πινάκων να εξετάσετε αν το σύνολο $\{A, B, C, D\}$ των επομένων διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν όχι να βρείτε ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

9. Αν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα επόμενα διανύσματα είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα
$$v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3,\ \ldots,\ v_1 + \ldots + v_n.$$